Série 9 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.3, 1.4, 1.5 Mots-clés : *Espaces vectoriels, application linéaire, noyau, image, dimension, matrice d'une application linéaire, changement de base*

Remarques :

1. La série est volontairement longue, il n'est pas indispensable de la finir en une semaine. Vous pouvez sauter certains exercices, et les aborder pendant les vacances, ou pendant les séances de révision.
2. Il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours.
3. Il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

Soit $\mathbb{P}_2$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2, dont on admet que c'est un espace vectoriel. On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver une base de $\operatorname{Ker} T$.
c) Trouver une base de $\operatorname{Im} T$.

Sol.:

a) Pour tous $p_1, p_2, p \in \mathbb{P}_2$ et $c \in \mathbb{R}$, on a :

$$T(p_1 + p_2) = \begin{pmatrix} p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(0) \\ p_1(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix} = T(p_1) + T(p_2).$$

$$T(cp) = \begin{pmatrix} cp(0) \\ cp(0) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = cT(p).$$

b) $T(p) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow p(0) = 0$. Considérons un polynôme $p \in \mathbb{P}_2$ de la forme $p(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$. On a $p(0) = 0 \Leftrightarrow c_0 = 0 \Leftrightarrow p(t) = c_2t^2 + c_1t$. Ainsi, une base de $\operatorname{Ker} T$ est $\{t, t^2\}$.

c) Soit p de la forme $p(t) = c_2t^2 + c_1t + c_0$. L'image $\operatorname{Im} T$ est l'ensemble des vecteurs $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, une base de $\operatorname{Im} T$ est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Soit $\overrightarrow{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

a) Donner la matrice M qui représente T par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).

Sol.: Deux versions : une sans utiliser la théorie sur le changement de base, et une avec.

Sans utiliser la théorie sur le changement de base

a) On note $\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3$ les vecteurs de la base canonique E de $\mathbb{R}^3$. Par définition, la matrice canonique de l'application T est

$$\left([T(\overrightarrow{e}_1)]_E \quad [T(\overrightarrow{e}_2)]_E \quad [T(\overrightarrow{e}_3)]_E\right).$$

On cherche

$$M = \left([T(\overrightarrow{e}_1)]_B \quad [T(\overrightarrow{e}_2)]_B \quad [T(\overrightarrow{e}_3)]_B\right).$$

On va donc chercher les vecteurs cordonnées de $T(\overrightarrow{e}_1)$, $T(\overrightarrow{e}_2)$ et $T(\overrightarrow{e}_3)$ par rapport à la base B. On note $\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3$ les vecteurs de la base B. Commençons par $T(\overrightarrow{e}_1)$. On cherche l'unique vecteur $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ tel que $T(\overrightarrow{e}_1) = r_1 \overrightarrow{b}_1 + r_2 \overrightarrow{b}_2 + r_3 \overrightarrow{b}_3$, i.e.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = [T(\overrightarrow{e}_1)]_B. \tag{1}$$

De façon similaire, on obtient

$$[T(\overrightarrow{e}_2)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad [T(\overrightarrow{e}_3)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On procède de manière identique pour expliciter

$$M = \left([T(\overrightarrow{b}_1)]_E \quad [T(\overrightarrow{b}_2)]_E \quad [T(\overrightarrow{b}_3)]_E \right) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici les 3 systèmes à résoudre sont très simples car ils font intervenir la matrice identité (matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base canonique E).

c) La matrice M recherchée est ici donnée par

$$M = \left([T(\overrightarrow{b}_1)]_B \quad [T(\overrightarrow{b}_2)]_B \quad [T(\overrightarrow{b}_3)]_B \right).$$

Les 3 systèmes à résoudre font intervenir la même matrice qu'en (**??**). On obtient

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En utilisant la théorie sur le changement de base

a) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T. On obtient

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui sont encore exprimés dans la base canonique E. Il faut maintenant calculer la matrice de passage de la base E à la base B, notée P_{BE} (telle que $[\overrightarrow{x}]_B = P_{BE}[\overrightarrow{x}]_E$). On sait, du cours, que cette matrice est l'inverse de la matrice de passage de la base B à la base E, notée P_{EB}. Cette dernière est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

i.e. ses colonnes sont les vecteurs de la base B, exprimés dans la base E. Pour calculer son inverse, on peut utiliser la méthode vue en cours (avec l'identité à droite), ou calculer directement son inverse en résolvant $P_{EB}P_{EB}^{-1} = I_3$, où l'on pose

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P_{EB} contient beaucoup de zéros, il sera plus simple de résoudre le système d'équations obtenu que d'utiliser la méthode vue en cours. On obtient facilement que l'inverse est

$$P_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P_{BE}.$$

On applique alors P_{BE} aux vecteurs obtenus précédemment (qui sont exprimés dans la base E). La matrice M est

$$M = \left([P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_1)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_2)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{e}_3)]\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) On commence par prendre les vecteurs de la base de départ et à leur appliquer la transformation T.

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

qui sont exprimés dans la base canonique E. La matrice M est

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Variante en utilisant la définition de la matrice associée à T. On sait que $T(\overrightarrow{b_i}) = A\overrightarrow{b_i}$ avec $A = ([T(\overrightarrow{e_1})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_2})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_3})]_E)$. Ainsi on peut trouver les colonnes de notre matrice cherchée en résolvant

$$([T(\overrightarrow{e_1})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_2})]_E \quad [T(\overrightarrow{e_3})]_E)([\overrightarrow{b_1}]_E \quad [\overrightarrow{b_2}]_E \quad [\overrightarrow{b_3}]_E) = (T(\overrightarrow{b_1}) \quad T(\overrightarrow{b_2}) \quad T(\overrightarrow{b_3}))$$

c) On applique P_{BE} aux vecteurs obtenus au point précédent et on obtient la matrice

$$M = \left([P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_1)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_2)] \quad [P_{BE}\overrightarrow{T}(\overrightarrow{b}_3)]\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

a) Soit A une matrice 5×6. Si $\dim(\mathrm{Ker}A) = 3$, quel est le rang de A ?

b) Soit A une matrice 7×3. Quel est le rang maximum de A ? Quelle est la dimension minimum de $\mathrm{Ker}A$? Même question si A est une matrice 3×7.

c) Soit A une matrice $n \times n$. Donner une condition sur $\mathrm{rang}(A)$ pour que A^T soit inversible.

d) Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une transformation linéaire telle que $T \circ T \circ T = I_3$ (l'application identité). Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}T$?

Sol.:

a) On considère l'application linéaire associée de $\mathbb{R}^6$ dans $\mathbb{R}^5$. Le théorème du rang donne

$$\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}A = 6 \Rightarrow \mathrm{rang}(A) = 3.$$

b) Si A est de taille 7×3, alors $\mathrm{rang}(A)+\dim \mathrm{Ker}A = 3$. Le rang maximum est 3 et la dimension minimum du noyau est 0.

Si A est de taille 3×7 , le rang maximum est 3. Comme $\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}A = 7$, la dimension minimum du noyau est 4.

c) A^T est inversible $\Leftrightarrow$ A est inversible $\Leftrightarrow$ $\text{rang}(A) = n$.

d) On a

$$3 = \text{rang}(I_3) = \text{rang}(T \circ T \circ T).$$

Ainsi, $\text{Ker}(T \circ T \circ T) = \{\overrightarrow{0}\}$. Comme

$$\overrightarrow{v} \in \text{Ker}T \Rightarrow \overrightarrow{v} \in \text{Ker}(T \circ T \circ T),$$

on obtient $\dim \text{Ker}T = 0$.

Exercice 4

Soient $B = \{\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2\}$ et $C = \{\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. On suppose $\overrightarrow{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base C vers la base B.

b) Donner la matrice de changement de base (matrice de passage) de la base B vers la base C.

c) Si $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ est tel que $[\overrightarrow{v}]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, calculer $[\overrightarrow{v}]_C$.

d) À présent, si $[\overrightarrow{v}]_C = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculer $[\overrightarrow{v}]_B$.

Sol.:

a) P_{BC} est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées de $\overrightarrow{c}_1$ et $\overrightarrow{c}_2$ dans la base B : $P_{BC} = ([\overrightarrow{c}_1]_B\, [\overrightarrow{c}_2]_B)$. Il faut donc résoudre deux sytèmes linéaires afin de trouver $[\overrightarrow{c}_i]_B$, $i = 1, 2$:

$$\overrightarrow{c}_i = x_{1i}\overrightarrow{b}_1 + x_{2i}\overrightarrow{b}_2 = (\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2)\begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, P_{BC} est la solution de

$$(\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2)P_{BC} = (\overrightarrow{c}_1 \quad \overrightarrow{c}_2).$$

Si on désigne par E la base canonique, cela peut aussi être interprété comme $P_{EB}P_{BC} = P_{EC}$. Pour résoudre ce système linéaire, on échelonne et on réduit la matrice $(\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2)$ augmentée avec les vecteurs $\overrightarrow{c}_1$ et $\overrightarrow{c}_2$:

$$(\overrightarrow{b}_1 \quad \overrightarrow{b}_2 | \overrightarrow{c}_1 \quad \overrightarrow{c}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Ainsi, la matrice de passage cherchée est $P_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

b) On a $P_{CB} = P_{BC}^{-1}$, d'où la matrice cherchée est $P_{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

c) $[\overrightarrow{v}]_C = P_{CB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

d) $[\overrightarrow{v}]_B = P_{BC}\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une base de Ker$C$.
2. On note par T la transformation linéaire de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $T(\overrightarrow{x}) = C\overrightarrow{x}$. L'application T est-elle injective ? T est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Sol.: L'espace nul ou noyau de C est la solution générale de l'équation $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. On doit résoudre cette équation pour trouver une base de Ker$C$. On échelonne puis on réduit C :

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_4 \\ l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \\ l_2 - \frac{5}{2}l_1 \\ l_3 - \frac{3}{2}l_1 \\ l_4 - 4l_1 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 3/2 & 1/2 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} . \\ . \\ l_3 + l_2 \\ . \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} . \\ . \\ . \\ l_4 + 5l_3 \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On reduit la forme échelonnée précédente :

$$C \sim \begin{array}{c} . \\ l_2 - 2l_3 \\ . \\ . \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3/2 & -1/2 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} . \\ -\frac{2}{3}l_2 \\ . \\ . \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} l_1 - l_2 \\ . \\ . \\ . \end{array}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La forme échelonnée réduite de C est donc $C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 & -26/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On écrit le système $C'\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ sous la forme classique, pouvant à présent exprimer chaque inconnue principale en fonction des inconnues secondaires :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{10}{3}x_5 & = & 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{26}{3}x_5 & = & 0 \\ x_4 - 4x_5 & = & 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_5 \\ x_2 & = & -\frac{1}{3}x_3 + \frac{26}{3}x_5 \\ x_3 & = & x_3 \\ x_4 & = & 4x_5 \\ x_5 & = & x_5 \end{array}\right.$$

La forme vectorielle de ce système est :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient la solution générale du système $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$:

$$\overrightarrow{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -10/3 \\ 26/3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le noyau de C est engendré par les vecteurs obtenus ci-dessus, que l'on choisit par exemple de multiplier par 3 pour éviter des fractions :

$$\overrightarrow{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{w}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 26 \\ 0 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. L'application T n'est pas surjective puisque l'espace des colonnes n'engendre pas $\mathbb{R}^4$ et elle n'est pas injective puisque le vecteur nul n'est pas la seule solution de $C\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 6

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que les matrices A et B sont équivalentes (selon les lignes). (**Indication :** quelle est la forme échelonnée et réduite des deux matrices ?)

b) Calculer le rang de A et $\dim(\mathrm{Ker}A)$.

c) Trouver une base pour chacun des sous-espaces $\mathrm{Im}A$, $\mathrm{Ker}A$ et $\mathrm{Ker}A^T$, ainsi que du sous-espace $\mathrm{Lgn}(A)$ engendré par les lignes de A.

Sol.:

a) On constate que la forme échelonnée réduite des deux matrices est la même, elles sont donc équivalentes.

b) En analysant la matrice B on remarque alors que :

Il y a deux colonnes indépendantes ce qui donne $\mathrm{rang}A = 2$ (le rang est le nombre de colonnes-pivot) et une base de $\mathrm{Im}A$ peut être formée par les deux premières colonnes de A qui correspondent aux colonnes-pivot de sa forme échelonnée. Par le Théorème du rang on trouve $\dim\mathrm{Ker}A = 4 - \mathrm{rang}A = 2$.

c) Trouvons les bases.

Base de Ker(A) : L'équation $A\overrightarrow{x} = 0$ est équivalente à $B\overrightarrow{x} = 0$; une base de Ker$A$ est donnée par exemple par : $\left(\begin{pmatrix}2\\5\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ et donc $\dim \mathrm{Ker} A = 2$, ce qui confirme le calcul effectué ci-dessus.

Base de Lgn(A) : Une base du sous-espace engendré par les lignes de A est donnée par les lignes non nulles de la forme échelonnée B :

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\5\\-6\end{pmatrix}\right)$$

Base de Im(A) et Ker(A) : Enfin ImA coïncide avec le sous-espace engendré par les lignes de A^T. Puisqu'il est de dimension 2, le Théorème du rang nous apprend que le noyau de A^T est de dimension $3-2=1$. On trouve que KerA^T est engendré par $\begin{pmatrix}2\\7\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 7

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver la dimension et une base de ImT.
c) Appliquer le Théorème du rang pour trouver la dimension du noyau de T.
d) Vérifier le résultat de c) en trouvant une base de Ker$T$.

Sol.: L'application T est linéaire puisque chacune des composantes de $T(p+q)$ est égale à $(p+q)(0) = p(0) + q(0)$, par définition de la somme de polynômes. De même $(\alpha p)(0) = \alpha \cdot p(0)$ pour tout nombre réel α, ce qui montre la compatibilité de T avec l'action.

L'image de T est constituée de tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ de la forme $\begin{pmatrix} p(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$. Leurs deux composantes sont égales et elles peuvent être non nulles (il suffit de choisir le polynôme constant 1 pour obtenir le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi l'image de T est de dimension un, une base est donnée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par le Théorème du rang, le noyau est donc de dimension $\dim \mathbb{P}_2 - 1 = 3 - 1 = 2$. Pour terminer il nous suffit de comprendre quels sont les polynômes p qui sont envoyés sur zéro par T. Ce sont tous ceux pour lesquels $p(0) = 0$, ce qui signifie que le coefficient constant est nul. Autrement dit

$$\mathrm{Ker} T = \{bt + ct^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{t, t^2\}$$

Une base du noyau est ainsi donnée par (t, t^2).

Exercice 8

On considère la transformation $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2$ définie par

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = (a + b + c + d) + (a + b)t + (c + d)t^2.$$

a) Vérifier que T est linéaire.
b) Trouver la dimension et une base de ImT.
c) Vérifier que le polynôme $7 + 5t + 2t^2$ est bien dans l'image de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (b).
d) Trouver la dimension et une base de Ker$T$.
e) Vérifier que le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T et donner ses coordonnées dans la base trouvée en (d).

Sol.: Par rapport aux bases canoniques $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ et $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$, la matrice associée à l'application linéaire T est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc l'image de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_2$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Im}} = \{1 + t, 1 + t^2\}$ et le noyau de T est un sous-espace de $\mathbb{P}_3$ de dimension 2 avec base $\mathcal{B}_{\text{Ker}} = \{1 - t, t^2 - t^3\}$.
Le polynôme $7+5t+2t^2$ est bien dans l'image de T puisque - par exemple - $T(5+2t^2) = 7+5t+2t^2$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Im}}$ sont $(7 + 5t + 2t^2)_{\mathcal{B}_{\text{Im}}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, puisque

$$7 + 5t + 2t^2 = 5(1 + t) + 2(1 + t^2).$$

Le polynôme $2 - 2t - 5t^2 + 5t^3$ est bien dans le noyau de T puisque $T(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3) = 0$. Ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_{\text{Ker}}$ sont $(2 - 2t - 5t^2 + 5t^3)_{\mathcal{B}_{\text{Ker}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, puisque

$$2 - 2t - 5t^2 + 5t^3 = 2(1 - t) - 5(t^2 - t^3).$$

Exercice 9

Dans $\mathbb{P}_2$, calculer la matrice de changement de base de la base

$$\mathcal{B} = (1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2)$$

vers la base canonique $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$. Puis écrire les coordonnées du vecteur $p = -1 + 2t$ dans la base $\mathcal{B}$.

Sol.:

Pour trouver la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$, il suffit d'écrire la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées du vecteur $x(t) = -1 + 2t$ dans la base standard sont : $(x)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les coordonnées $(x)_{\mathcal{B}}$ du même vecteur dans la base $\mathcal{B}$ vérifient : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} (x)_{\mathcal{B}} = (x)_{\mathcal{C}}$. Il suffit d'échelonner la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

pour trouver : $(x)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cela signifie que $-1+2t = 5(1-2t+t^2)-2(3-5t+4t^2)+(2t+3t^2)$, une égalité que l'on aura avantage à vérifier si on ne veut pas perdre trois points à l'examen alors que le raisonnement était parfait.

Exercice 10

1. Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+3y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport aux bases canoniques E de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
   b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport aux bases

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathbb{R}^3.$$

2. Soit $T\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $T(C) = X \cdot C$, où X est la matrice de taille 2×2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   a) Donner la matrice A de l'application linéaire T par rapport à la base canonique de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Donner la matrice B de l'application linéaire T par rapport à la base

$$\mathcal{B} = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\} \text{ de } \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

On cherche $B = \big([T(B_1)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_2)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_3)]_{\mathcal{B}} \quad [T(B_4)]_{\mathcal{B}}\big)$.

Sol.:

1. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B, on commence par calculer les images par T des vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées de ces deux vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 4 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}.$$

2. La matrice de l'application linéaire T par rapport à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la matrice B, on commence par calculer les images par T des matrices de la base $\mathcal{B}$:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5/2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$T\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = 0, T\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 0.$$

Ensuite, on calcule les coordonnées des deux premiers vecteurs image dans la base $\mathcal{C}$ (les deux derniers sont les vecteurs nuls quelle que soit la base considérée) en résolvant les systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 5/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 6 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -1/2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right).$$

Ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 9/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

Soit $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients réels.

1. Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid M \text{soit inversible}\}$. Alors
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de $M_{2\times 2}$
   - ☐ V est un espace vectoriel.
   - ☐ V n'est pas un espace vectoriel.
   - ☐ V est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices inversibles.
2. Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

   ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $[M]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. Quelle famille ci-dessous est une base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
   - ☐ $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

Sol.:

1. V n'est pas un sous-espace vectoriel
2. $[M]_E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exercice 12

Soit $B = (1 + t^2, 1 - 3t^2, 1 + t - 3t^2)$ une base de $\mathbb{P}_2$. Soit $E = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2$.

1. Soit $q \in \mathbb{P}_2$ donné par
$$[q]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
Trouver $[q]_E$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.
   a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.
   b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_B$.
   c) Résoudre $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.
2. Soit maintenant $q(t) = -2 + 5t - 2t^2$. Trouver $[q]_B$ en suivant les différentes méthodes vues en cours.
   a) En utilisant une multiplication matrice-vecteur : $P_{BE}[q]_E = [q]_B$.
   b) Sans passer pas une matrice de changement de base, mais en utilisant la définition de $[\cdot]_E$.
   c) Résoudre $P_{EB}[q]_B = [q]_E$.

Sol.:

1. Soit $q \in \mathbb{P}_2$ donné par
$$[q]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   a) La matrice P_{EB} de changement de base de la base B à la base E est
$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$
   Ainsi $[q]_E$ s'obtient par
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$
   et $q(t) = 2 + 2t - 10t^2$.

b) Par définition de $[\cdot]_B$, on a

$$[q]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow q(t) = -1(1+t^2) + 1(1-3t^2) + 2(1+t-3t^2)$$

Et en réarrangeant les termes de même ordre, on obtient $q(t) = 2 + 2t - 10t^2$.

c) Par définition

$$P_{BE} = \begin{pmatrix} [1]_B & [t]_B & [t^2]_B \end{pmatrix}$$

qui n'est pas facilement calculable. Or on sait que $P_{BE} = P_{EB}^{-1}$. On calcule l'inverse de la matrice du point a).

2. Soit $q(t) = -2 + 5t - 2t^2$. On sait que

$$[q]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

a) On peut trouver $[q]_B$ en multipliant P_{BE} avec $[q]_E$. Or la matrice P_{BE} n'est pas facilement calculable. Il faudrait inverser P_{EB} qui est donnée par

$$P_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Par définition de $[q]_E$, on a

$$[q]_E = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2 + 5t - 2t^2$$

Pour trouver $[q]_B$ il faut réarranger les termes et trouver a, b, c tels que

$$q(t) = a(1+t^2) + b(1-3t^2) + c(1+t-3t^2).$$

Ce n'est pas toujours évident de trouver les a, b, c. Ici $a = -2$, $b = -5$ et $c = 5$.

c) Résoudre $P_{EB}[q]_B = [q]_E$. On doit échelonner

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Et on obtient

$$[q]_B = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Exercice 13

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Le plan défini dans $\mathbb{R}^3$ par $z = 2$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. ☐ ☐

b) $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si l'application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est surjective. ☐ ☐

c) Soit V un espace vectoriel et $u \in V$. Alors l'opposé $-u$ de u est unique et $-u = (-1)u \in V$. ☐ ☐

d) Soit A une matrice de taille $m \times n$, alors $\mathrm{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. ☐ ☐

Sol.: Vrai : (c), (d). Faux : (a), (b).

a) Faux. En effet le vecteur nul n'appartient pas à ce plan.

b) Faux. On a que $\mathrm{Ker}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si et seulement si l'application $\overrightarrow{x} \mapsto A\overrightarrow{x}$ est injective et non pas surjective

c) Vrai. Supposons qu'il existe $u', u'' \in V$ tels que $u + u' = 0 = u' + u$ et $u + u'' = 0 = u'' + u$. On a alors que $u' = u' + 0 = u' + (u + u'') = (u' + u) + u'' = 0 + u'' = u''$. Donc l'oppose de u est unique, et on le note $-u$. Dès lors, par les propriétes d'espace vectoriel on a $(-1)u + u = (-1)u + 1u = (-1 + 1)u = 0u = 0$. PAr unicité de l'opposé on obtient que $(-1)u = -u$.

d) Vrai. En effet, si $u, v \in \mathrm{Ker}(A)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $A(u + \lambda v) = Au + \lambda Av = 0$ et donc $u + \lambda v \in \mathrm{Ker}(A)$.

Exercice 14

a) Soit a, b, c des nombres réels. On considère les quatre polynômes $p(t) = t^2 + t + 1$, $q(t) = t^2 + 2t + a$, $r(t) = t^3 + b$ et $s(t) = t + c$. Alors

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_4$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c ;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est toujours linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_4$;

☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ est linéairement dépendante dans $\mathbb{P}_3$ lorsque $a - c - 1 \neq 0$.

b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. Alors les matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendantes

☐ pour toutes valeurs de a, b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et pour toutes valeurs de b.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.

☐ lorsque $a \neq 0$ et $b = 3$.

c) Dire lequel parmi les énoncés suivants est vrai.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. S'il existe un réel t tel que $f(t) = 0$, alors f est le vecteur nul de V.

☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.

☐ Soit p un vecteur de l'espace vectoriel V des polynômes de degré $\leqslant 5$. Si $p(0) = 0$, alors p est le vecteur nul de V.

☐ Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ un vecteur de l'espace vectoriel V des suites réelles. S'il existe un entier n tel que $x_n = 0$, alors $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est le vecteur nul de V.

Sol.:

a) ☐ La famille $\{p, q, r, s\}$ forme une base de $\mathbb{P}_3$ pour certaines valeurs des paramètres a, b, c.
En effet on élimine d'emblée la première réponse puisque t^4 ne peut visiblement pas être obtenu comme combinaison linéaire des polynômes proposés pour des raisons de degré. Pour la suite on se demande si la famille $\{p.q, r, s\}$ est libre. On aimerait donc savoir quelle(s) combinaison(s) linéaire(s) $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s$ donne le polynôme nul. Tous ses coefficients sont nuls et nous obtenons donc un système de quatre équations :

$$\begin{cases} & & \gamma & & = 0 \\ \alpha & +\beta & & & = 0 \\ \alpha & +2\beta & & +\delta & = 0 \\ \alpha & +a\beta & +b\gamma & +c\delta & = 0 \end{cases}$$

Le nombre de solutions de ce système dépend des valeurs des paramètres. Lorsque $a-1 = c$, il y a une infinité de solutions, la famille de polynômes n'est donc pas libre. Mais, dans tous les autres cas, lorsque $a - 1 \neq c$, la seule solution est $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ et la famille forme donc une base de $\mathbb{P}_3$.

b) ☐ lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 3$.
Il y a deux manières de résoudre cet exercice. Soit on écrit un système $\alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3 + \delta A_4 = 0$, où 0 est la matrice nulle, et on trouve que pour forcer $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ il faut avoir $a \neq 0$ et $b \neq 3$. Soit on considère la base canonique $(e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ des matrices 2×2 et on écrit chacune des matrices A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, dans cette base (sous forme de vecteurs). On peut ensuite échelonner le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{pmatrix}$$

pour trouver sous quelles valeurs de a et b le système contient 4 pivots.

c) ☐ Soit f un vecteur de l'espace vectoriel V des fonctions réelles d'une variable réelle. Si f est le vecteur nul de V, alors $f(t) = 0$ pour tout nombre réel t.
Les autres affirmations sont toutes incorrectes pour la même raison. Il ne suffit pas de s'annuler en un point pour être le vecteur nul. La fonction nulle est la fonction constamment nulle, le polynôme nul est le polynôme 0, la suite nulle est la suite constamment nulle. Seuls ces vecteurs ont la propriété de ne pas modifier le vecteur auquel on les additionne.

Exercice 15

a) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

b) On considère les polynômes $p(t) = (1-t)(1+t) = 1-t^2$ et $q(t) = (1+t)(1+t) = 1+2t+t^2$ de $\mathbb{P}_2$.

☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

☐ Les polynômes p et q forment une base de $\mathbb{P}_2$.

☐ Le polynôme $q-p$ est le polynôme nul.

☐ $(1+t)p-(1-t)q$ est une combinaison linéaire de p et q.

c) Soit W l'hyperplan dans $\mathbb{R}^6$ donné par l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$. On considère les vecteurs $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

☐ On peut complèter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 6 vecteurs.

d) Soit V un espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_k$ des vecteurs de V.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors dim$V = k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est libre, alors dim$V \geqslant k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors dim$V = k$.

☐ Si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre l'espace vectoriel V, alors dim$V \geqslant k$.

e) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie par

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a+d.$$

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 1.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 2.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 4.

f) Soit $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application linéaire "trace" définie à la question f. Les matrices suivantes forment une base du noyau de Tr :

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sol.:

a) ☐ Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.

La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi Ker$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$, pas de $\mathbb{R}^4$. Pour trouver sa dimension il faut échelonner la matrice A. Comme toutes les lignes sont proportionnelles le noyau de A est la solution de l'équation $-x + 3y = 0$, une droite dans le plan.

b) ☐ Les polynômes p et q sont linéairement indépendants.

En effet, bien que $(1 + t)p + (1 - t)q = 0$, ce n'est pas une combinaison **linéaire**, car dans une combinaison linéaire seuls des coefficients réels sont permis, pas des coefficients polynomiaux. Malgré cela ils ne sont pas assez nombreux pour former une base de $\mathbb{P}_2$. Enfin, le polynôme $q - p$ s'annule en 0, mais ce n'est pas le polynôme nul, c'est $2t + 2t^2$.

c) ☐ On peut compléter $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ en une base de W composée de 5 vecteurs.

Les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont proportionnels, ils sont donc linéairement dépendants et ne peuvent être complétés en une base. Par contre les vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$ sont linéairement indépendants, ils peuvent donc être complétées en une base de W. Le sous-espace W est donné par une équation à six inconnues. Cinq d'entre elles sont des inconnues secondaires qui jouent le rôle de paramètres, la dimension de W est donc 5.

d) ☐ Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, alors $\dim V \geqslant k$.

Si la famille $\{v_1, \dots, v_k\}$ est libre, on peut *compléter* cette famille en une base et cette base aura donc au moins k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au minimum

($\dim V \geqslant k$). Alors que, si la famille $\{v_1, \ldots, v_k\}$ engendre V, on peut *extraire* une base de cette famille et cette base aura donc au plus k éléments. Autrement dit, la dimension de V est k au maximum ($\dim V \leqslant k$).

e) ☐ Le noyau de Tr est un sous-espace de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de dimension 3.

Pour avoir $\mathrm{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0$, il faut que $a + d = 0$, autrement dit que $d = -a$. Ainsi le noyau de l'application Tr correspond au sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

qui est de dimension 3.

f) ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Comme le noyau de Tr est de dimension 3, par la question f., il faut 3 matrices de ce sous-espace pour l'engendrer. De plus, les trois matrices ci-dessus sont linéairement indépendantes et appartiennent au noyau de Tr. Elles forment donc une base du noyau de Tr.

Exercice 16

Choix Multiple et Vrai-faux .

a. Soit $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$.

☐ $\mathrm{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 0

☐ $\mathrm{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 0

☐ $\mathrm{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1

☐ $\mathrm{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1

b. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

☐ Les colonnes de A engendrent le noyau de A^T.

☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est égal au sous-espace engendré par les colonnes de A.

☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A.

☐ La dimension du noyau de A est égale à la dimension du noyau de A^T.

c. Il existe une matrice A de taille 3×7 telle que :

☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 2$ et $\dim\mathrm{Im}A \leqslant 4$

a. ☐ ImA est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

La matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi Im$A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, pas de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver sa dimension, il faut analyser les colonnes de A. On constate qu'elles sont proportionnelles si bien que la dimension de ImA est 1.

b. ☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A.

La dimension du sous-espace engendré par les lignes de A est égale à celle du sous-espace engendré par les colonnes de A. C'est la clé du Théorème du rang ! Ces deux sous-espaces sont donc tous deux isomorphes à $\mathbb{R}^k$ si k est cette dimension. Ils sont donc isomorphes, c'est-à-dire que l'on peut les identifier en faisant correspondre les éléments d'une base de l'un à ceux d'une base de l'autre. Par contre ils ne sont pas égaux en général puisqu'ils ne vivent pas même dans le même espace vectoriel ambiant. L'espace des lignes est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors que celui des colonnes est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$.

Pour se rendre compte que les deux autre affirmations sont fausses, pensez par exemple une matrice non nulle ayant une unique ligne et disons 10 colonnes. Le noyau de cette matrice est de dimension 9 (une équation à 10 inconnues) alors que le noyau de la transposée est nul. Visiblement les colonnes de A ne peuvent engendrer le noyau de A^T.

c. ☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 5$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

La matrice A représente une application linéaire de $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace de dimension $\leqslant 3$. Le Théorème du rang affirme que $\dim\mathrm{Ker}A = 7 - \dim\mathrm{Im}A \geqslant 7-3 = 4$, ce qui élimine les deux premières affirmations. Intuitivement c'est clair : il faut "tuer" au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans $\mathbb{R}^3$. Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim\mathrm{Ker}A + \dim\mathrm{Im}A = 7$, ce qui élimine aussi la troisième affirmation. la seule qui ne contredit pas le Théorème du rang est la dernière.

d. ☐ $\dim\mathrm{Ker}A = 1$ et $\dim\mathrm{Im}A = 2$

On a $\dim\mathrm{Ker}A = 1$, puisque le noyau est la droite $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{e}_3\}$. et $\dim\mathrm{Im}A = 2$ puisque l'image de A est le plan Oxy, un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

e. ☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de

$\mathbb{R}^5$. Donc en particulier elles engendrent $\mathbb{R}^5$ et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente A est bijective, si bien que le noyau est *nul* (pas vide !), et l'image de A est $\mathbb{R}^5$ tout entier, donc le rang de A vaut 5.

f. ☐ 3×9.

La dimension de l'espace $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est 9. Donc T est une application linéaire d'un espace de dimension 9 vers un espace de dimension 3. Ainsi la matrice qui la représente est de taille 3×9.

g. ☐ $\dim \mathrm{Ker} T = 2$ et $\dim \mathrm{Im} T = 1$.

L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a+bt+ct^2) = 3a+2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

h. ☐ $\{-2+t+3t^2, 2-3t^2\}$.

Par g., la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que les polynômes $-2+t+3t^2$ et $2-3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T. Ils forment donc une base du noyau. En revanche, le polynôme $3+2t^2$ n'est pas dans le noyau car $T(3+2t^2) = 13 \neq 0$.

☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 3$ et $\dim \mathrm{Im} A = 4$

☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 4$ et $\dim \mathrm{Im} A \leqslant 2$

☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 5$ et $\dim \mathrm{Im} A = 2$

d. Soit A la matrice de la projection orthogonale $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sur le plan horizontal $\mathrm{Vect}\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2\}$.

☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 1$ et $\dim \mathrm{Im} A = 1$

☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 2$ et $\dim \mathrm{Im} A = 1$

☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 1$ et $\dim \mathrm{Im} A = 2$

☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 2$ et $\dim \mathrm{Im} A = 2$

e. Soit A une matrice inversible de taille 5×5. Laquelle des affirmations suivantes est vraie ?

☐ Les colonnes de A n'engendrent pas $\mathbb{R}^5$.

☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

☐ Le noyau de A est vide.

☐ Le rang de A est strictement plus petit que 5.

f. La matrice qui représente une application linéaire $T\colon \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ est de taille

☐ 3×3.

☐ 3×9.

☐ 3×6.

☐ 9×3.

g. Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Alors

☐ T n'est pas linéaire.

☐ $\dim\mathrm{Ker}T = 1$ et $\dim\mathrm{Im}T = 2$.

☐ $\dim\mathrm{Ker}T = 1$ et $\dim\mathrm{Im}T = 1$.

☐ $\dim\mathrm{Ker}T = 2$ et $\dim\mathrm{Im}T = 1$.

h. Soit $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $T(p) = p(-1) + p(0) + p(1)$. Une base du noyau de T est donnée par

☐ $\{t\}$.

☐ $\{t, 3 + 2t^2\}$.

☐ $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

☐ $\{2 - 3t^2\}$.

Sol.:

a. ☐ $\mathrm{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$ de dimension 1.

La matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ représente une application linéaire $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ainsi $\mathrm{Im}A$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^4$, pas de $\mathbb{R}^2$. Pour trouver sa dimension, il faut analyser les colonnes de A. On constate qu'elles sont proportionnelles si bien que la dimension de $\mathrm{Im}A$ est 1.

b. ☐ Le sous-espace engendré par les lignes de A est isomorphe au sous-espace engendré par les colonnes de A.

La dimension du sous-espace engendré par les lignes de A est égale à celle du sous-espace engendré par les colonnes de A. C'est la clé du Théoréme du rang ! Ces deux sous-espaces sont donc tous deux isomorphes à $\mathbb{R}^k$ si k est cette dimension. Ils sont donc isomorphes, c'est-à-dire que l'on peut les identifier en faisant correspondre les éléments d'une base de l'un à ceux d'une base de l'autre. Par contre ils ne sont pas égaux en général puisqu'ils ne vivent pas même dans le même espace vectoriel ambiant. L'espace des lignes est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors que celui des colonnes est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$.

Pour se rendre compte que les deux autre affirmations sont fausses, pensez par exemple une matrice non nulle ayant une unique ligne et disons 10 colonnes. Le noyau de cette matrice est de dimension 9 (une équation à 10 inconnues) alors que le noyau de la transposée est nul. Visiblement les colonnes de A ne peuvent engendrer le noyau de A^T.

c. ☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 5$ et $\dim \mathrm{Im} A = 2$

La matrice A représente une application linéaire $\mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'image de A est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$, c'est donc un sous-espace de dimension $\leqslant 3$. Le Théorème du rang affirme que $\dim \mathrm{Ker} A = 7 - \dim \mathrm{Im} A \geqslant 7 - 3 = 4$, ce qui élimine les deux premières affirmations. Intuitivement c'est clair : il faut "tuer" au moins un sous-espace de dimension 4 pour envoyer un espace de dimension 7 dans $\mathbb{R}^3$. Enfin le Théorème du rang s'écrit aussi $\dim \mathrm{Ker} A + \dim \mathrm{Im} A = 7$, ce qui élimine aussi la troisième affirmation. la seule qui ne contredit pas le Théorème du rang est la dernière.

d. ☐ $\dim \mathrm{Ker} A = 1$ et $\dim \mathrm{Im} A = 2$

On a $\dim \mathrm{Ker} A = 1$, puisque le noyau est la droite $\mathrm{Vect}\{\vec{e}_3\}$. et $\dim \mathrm{Im} A = 2$ puisque l'image de A est le plan Oxy, un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

e. ☐ Les lignes de A sont linéairement indépendantes.

La forme échelonnée d'une matrice inversible a un pivot dans chaque ligne et chaque colonne. Ainsi les colonnes, et les lignes également, forment une base de $\mathbb{R}^5$. Donc en particulier elles engendrent $\mathbb{R}^5$ et elles sont linéairement indépendantes. L'application linéaire que représente A est bijective, si bien que le noyau est *nul* (pas vide !), et l'image de A est $\mathbb{R}^5$ tout entier, donc le rang de A vaut 5.

f. ☐ 3×9.

La dimension de l'espace $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est 9. Donc T est une application linéaire d'un espace de dimension 9 vers un espace de dimension 3. Ainsi la matrice qui la représente est de taille 3×9.

g. ☐ $\dim \mathrm{Ker} T = 2$ et $\dim \mathrm{Im} T = 1$.

L'application T est linéaire et, plus explicitement, on a $T(a + bt + ct^2) = 3a + 2c$. En particulier, T n'est pas l'application nulle et donc la dimension de l'image de T est 1. Par le théorème du rang, celle du noyau est 2.

h. ☐ $\{-2 + t + 3t^2, 2 - 3t^2\}$.

Par g., la dimension du noyau vaut 2. Il faut donc 2 polynômes linéairement indépendants pour engendrer le noyau. On remarque que les polynômes $-2 + t + 3t^2$ et $2 - 3t^2$ sont des polynômes linéairement indépendants qui appartiennent au noyau de T. Ils forment donc une base du noyau. En revanche, le polynôme $3 + 2t^2$ n'est pas dans le noyau car $T(3 + 2t^2) = 13 \neq 0$.

Exercices additionnels

Exercice 17

Soit $\mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 2. Parmi les quatre sous-ensembles de $\mathbb{P}_2$ ci-dessous, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{P}_2$

$$E_1 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_2^2\}$$
$$E_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p(0) = 1\}$$
$$E_3 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, p'(t) = 0\}$$
$$E_4 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_0 = a_1 = a_2\}$$

Sol.: E_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ car il n'est pas stable sous l'addition : si

$p(t), q(t) \in E_1$ alors $p(t) = a_0 + a_1 + a_2 t^2$, $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ avec $a_0 = a_2^2$ et $b_0 = b_2^2$

$$p(t) + q(t) = a_2^2 + a_1 t + a_2 t^2 + b_2^2 + b_1 t + b_2 t^2 = (a_2^2 + b_2^2) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2.$$

et comme $(a_2^2 + b_2^2) \neq (a_2 + b_2)^2$, $p(t) + q(t) \notin E_1$

E_2 n'est pas un sous-espace vecoriel de $\mathbb{P}_2$ car le polyôme nul n'est pas dans E_2, car il ne vérifie pas $p(0) = 1$. En effet les polynômes de E_2 sont de la forme $p(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2$ (comme cela quand $t = 0$ on a $p(0) = 1$).

Les deux derniers sont des sous-espaces vectoriels car ils vérifient les 3 axiomes.

Exercice 18

Soient V et W deux espaces vectoriels, et $T : V \to W$ une transformation linéaire. Montrer que si $U \subset V$ est un sous-espace vectoriel, alors l'ensemble image $T(U)$ est un sous-espace vectoriel de W.

Sol.: On doit prouver (i) si $w \in T(U)$ et α est un scalaire, alors $\alpha w \in T(U)$ et (ii) si $w_1 \in T(U)$ et $w_2 \in T(U)$ alors $w_1 + w_2 \in T(U)$, et (iii) $T(U)$ contient 0_W.

(i) En effet : $w \in T(U) \Leftrightarrow w = T(u)$ pour un certain $u \in U$. Ainsi, en utilisant la linéarité de T, $\alpha w = \alpha T(u) = T(\alpha u) \in T(U)$ ($\alpha u \in U$ car U est un s.e.v. de V, donc fermé pour la multiplication par un scalaire). (ii) De même, $w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in T(U)$ (U est fermé pour l'addition). (iii) On a $0_V \in U$ car U s.e.v. de V et $T(0_V) = 0_W$ par linéarité de T, donc $0_W \in T(U)$ (car il existe $u = 0_V \in U$ tel que $0_W = T(u)$).

Exercice 19

On rappelle que $C([0, 1])$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$.

a) L'ensemble de vecteurs $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \cos t\}$ est-il linéairement indépendant dans $C([0, 1])$?
b) Même question pour $\{t \mapsto \sin t,\ t \mapsto \sin t \cos t,\ t \mapsto \sin 2t\}$.

Sol.:

a) Oui car si c_1, c_2 sont des scalaires tels que $c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors en prenant $t = 0$ puis $t = \pi/6$, on obtient $c_2 = 0$ (car $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$) puis $c_1 = 0$ (car $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$).
b) Non car il existe une combinaison linéaire non triviale, $\sin 2t - 2 \sin t \cos t = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Exercice 20

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ telles que

$$KerA \cap ColB = \{\overrightarrow{0}\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{b}_1, \cdots, \overrightarrow{b}_k\}$, $k \leqslant n$, une base de $ColB$. Montrer que $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ est une base de $Col(AB)$.

Sol.: **Méthode 1 :** Soit $\overrightarrow{T}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée à la matrice A. On considère sa restriction $\overrightarrow{T}_{A_{|ColB}}$ au sous-espace $ColB \subset \mathbb{R}^n$:

$$\overrightarrow{T}_{A_{|ColB}} : ColB \to \mathbb{R}^m.$$

Comme $KerA \cap ColB = \{\overrightarrow{0}\}$, cette application est injective. De plus, l'image de cette application est $\overrightarrow{T}_A(ColB) = Col(AB)$. L'application $\overrightarrow{T}_A$ réalise donc une bijection entre $ColB$ et $Col(AB)$. Par conséquent, la matrice A transforme toute base de $ColB$ en une base de $Col(AB)$.

Méthode 2 : Montrons d'abord que la famille $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ est linéairement indépendante. Soient $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{aligned} &c_1 A\overrightarrow{b}_1 + c_2 A\overrightarrow{b}_2 + \cdots + c_k A\overrightarrow{b}_k = \overrightarrow{0} \\ &\text{alors, } A(c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k) = \overrightarrow{0} \\ &\text{ainsi, } c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k \in KerA. \end{aligned}$$

Or, le vecteur $c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k$ appartient à $ColB$ comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{b}_j \in ColB$. Mais $KerA \cap ColB = \{\overrightarrow{0}\}$, ainsi $c_1\overrightarrow{b}_1 + \cdots + c_k\overrightarrow{b}_k = \overrightarrow{0}$. $\mathcal{B}$ étant une base, $\mathcal{B}$ est linéairement indépendante, d'où $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Par ailleurs, les colonnes de la matrice AB sont données par $A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k$, donc $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ engendre $Col(AB)$. La famille $\{A\overrightarrow{b}_1, \cdots, A\overrightarrow{b}_k\}$ est donc une base de $Col(AB)$.

Exercice 21

Soient V et W deux espaces vectoriels, T une transformation linéaire : $T : V \to W$ et $\{v_1, \ldots, v_p\}$ un sous-ensemble de V.

a) Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement dépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement dépendant.
b) Supposons que la transformation T est injective, c'est-à-dire que $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$. Montrer que si l'ensemble $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est linéairement indépendant alors l'ensemble $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ est linéairement indépendant.

Sol.:

a) Si $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement dépendants, alors il existe des nombres réels $c_1, \ldots, c_p$, non tous nuls, tels que :
$$c_1 v_1 + \ldots + c_p v_p = 0.$$

Puisque T est linéaire,

$$T(c_1v_1 + \ldots + c_pv_p) = T(0) = 0 \quad \text{et} \quad c_1T(v_1) + \ldots + c_pT(v_p) = 0.$$

Comme les c_i ne sont pas tous nuls, $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ sont linéairement dépendants.

b) On suppose que $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement indépendants. Pour montrer que $\{T(v_1), \ldots, T(v_p)\}$ sont linéairement indépendants, considérons une combinaison linéaire donnant le vecteur nul :

$$c_1T(v_1) + \ldots + c_pT(v_p) = 0.$$

Puisque T est linéaire et que $0 = T(0)$, on peut écrire cela sous la forme suivante :

$$T(c_1v_1 + \ldots + c_pv_p) = T(0).$$

Par hypothèse, T est injective, donc cette équation implique que $c_1v_1+\ldots+c_pv_p = 0$. Puisque les vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ sont linéairement indépendants, on conclut que $c_1 = \cdots = c_p = 0$.

Exercice 22

Vous pouvez ignorer la partie (c).

a) Soit W l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation $x - y + z = 0$. Trouver une application linéaire $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dont W est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

b) Soit U le sous-ensemble des polynômes p de $\mathbb{P}_2$ vérifiant $p(1) = 0$. Trouver une application linéaire $\varphi\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ dont U est le noyau, puis donner une base de ce sous-espace.

c) Construire un isomorphisme $F\colon U \to W$. On pourra utiliser la notion de coordonnées pour comparer U avec $\mathbb{R}^2$, puis $\mathbb{R}^2$ avec W.

Sol.:

a) L'ensemble des vecteurs appartenant à ce plan W forme un sous espace de $\mathbb{R}^3$ puisqu'il s'agit du noyau de l'application linéaire $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x, y, z) = x - y + z$.

On écrit la forme paramétrique d'un vecteur $\overrightarrow{w}$ de ce plan en choisissant les inconnues secondaires y et z comme paramètres (s et t) :

$$\overrightarrow{w} = s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

où s, t sont des réels quelconques. On en déduit qu'un ensemble générateur (non unique) du plan est formé par les vecteurs

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont linéairement indépendants puisqu'ils correspondent au choix des valeurs $s = 1$, $t = 0$ d'une part et $s = 0$, $t = 1$ d'autre part. Ils forment donc une base de W.

b) L'ensemble des polynômes appartenant à U forme un sous espace de $\mathbb{P}^2$ puisqu'il s'agit du noyau de l'application linéaire $\varphi\colon \mathbb{P}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(p) = p(1)$.

Un polynôme $p = a + bt + ct^2$ de $\mathbb{P}^2$ appartient à U s'il satisfait $p(1) = a + b + c = 0$. En choisissant les inconnues secondaires b et c comme paramètres (α et β), on peut écrire tout polynôme p de U comme combinaison

$$p = \alpha(t-1) + \beta(t^2-1),$$

où α, β sont des réels quelconques. On en déduit qu'un ensemble générateur (non unique) de U est formé par les polynômes

$$t - 1 \qquad \text{et} \qquad t^2 - 1.$$

Ces deux polynômes sont linéairement indépendants puisqu'ils correspondent au choix des valeurs $\alpha = 1$, $\beta = 0$ d'une part et $\alpha = 0$, $\beta = 1$ d'autre part. Ils forment donc une base de U.

c) On peut définir $F\colon U \to W$ comme la composée de l'application

$$U \to \mathbb{R}^2, \qquad \alpha(t-1) + \beta(t^2-1) \mapsto \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

et de l'application

$$\mathbb{R}^2 \to W, \qquad \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \mapsto \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ces deux applications sont bijectives, car elles correspondent à des applications qui donnent les coordonnées d'un polynôme/vecteur dans une base donnée. Ainsi F est un isomorphisme.

On peut aussi construire l'isomorphisme directement :

$$F\colon U \to W, \qquad a + bt + ct^2 \mapsto \begin{pmatrix}a\\-b\\c\end{pmatrix}.$$

C'est bien défini, car si $a+b+c = 0$, alors $\begin{pmatrix}a\\-b\\c\end{pmatrix}$ appartient à W. Vérifier que F est bijective.

Exercice 23

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet une solution pour tout $\overrightarrow{b}$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $A^T\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ n'admet que la solution triviale $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$.

Sol.: Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Dire que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ admet toujours une solution est équivalent à dire que A est surjective, i.e. $\dim \mathrm{Im} A = m$. Par le Théorème du rang la dimension du noyau de A vaut $n - m$, ou encore le sous-espace engendré par les lignes de A est de dimension m. Les lignes de A étant les colonnes de A^T ceci veut dire que $\dim \mathrm{Im} A^T = m$. Une dernière application du Théorème du rang nous permet enfin de conclure que dimKer$A^T = m - m = 0$. La matrice A^T représente donc une application linéaire injective. Ceci équivaut à dire que l'équation $A^T\overrightarrow{x} = 0$ n'admet que la solution triviale.

Exercice 24

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Donner une base pour le noyau, l'image, et l'espace engendré par les lignes de A, puis vérifier que l'affirmation du théorème du rang est bien vérifiée.

Sol.: Une forme échelonnée de A est

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit donc des pivots dans les colonnes 1 et 2, ce qui implique que $\mathrm{Im}\, A$ ($= \mathrm{Col}\, A$) est engendré par sa première et sa deuxième colonne, donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

est une base de $\mathrm{Im}\, A$. On obtient le noyau en remarquant que x_3 et x_4 sont libres, et que les autres sont données par $x_1 = x_3 - 5x_4$, $2x_2 = 5x_3 - 6x_4$. Une base de $\mathrm{Ker}\, A$ est donc donnée par

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Finalement, puisque Lgn $A =$ Lgn $\widetilde{A}$, la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

forme une base de $\mathrm{Lgn}\, A$.

L'affirmation du théorème du rang est vérifiée, puisque $\dim(\mathrm{Col}\, A) = 2 = \dim(\mathrm{Lgn}\, A)$, et que

$$\dim(\mathrm{Ker}\, A) + \dim(\mathrm{Col}\, A) = 2 + 2 = 4 \quad (= \#(\text{colonnes de } A))$$

Exercice 25

Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Donner la matrice de T dans la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

Sol.: Le solutionnaire propose une façon de résoudre l'exercice qui est différente de (mais équivalente à) celle que l'on a vue en classe.

On exprime d'abord T dans la base canonique :

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, puisque les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3, \overrightarrow{b}_4)$ sont donnés par

$$\overrightarrow{b}_1 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_3\,, \quad \overrightarrow{b}_2 = -\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{e}_4\,, \quad \overrightarrow{b}_3 = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_4\,, \quad \overrightarrow{b}_4 = 2\overrightarrow{e}_4\,,$$

on a la matrice de changement de base :

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son inverse se calcule par exemple en utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan, qui donne

$$P_{\mathcal{E}\mathcal{B}}^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On calcule alors

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}}P_{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 26

Soit V un espace vectoriel muni des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. En n'utilisant QUE les 10 axiomes d'un espace vectoriel, montrer les propriétés suivantes. Notons l'élément nul de V avec 0_V, afin de le distinguer de 0.

a) L'élément inverse de $v \in V$ est unique.
b) $0v = 0_V$ et $0_V = -0_V$.
c) $\alpha 0_V = 0_V$.
d) $(-1)v = -v$.

Sol.:

a) L'élément inverse de $v \in V$ est unique. Supposons que pour $v \in V$, il existe un autre inverse dans V, noté w. Par définition de l'inverse (axiome 5)) $v + w = 0_V$. Ainsi

$$(-v) \overset{4)}{=} (-v) + 0_V \overset{v+w=0_V}{=} (-v) + (v + w) \overset{3)}{=} ((-v) + v) + w \overset{5)}{=} (0_V) + w \overset{2),4)}{=} w.$$

b) $0v = 0_V$ et $0_v = -0_V$. On a que $0 = 0 + 0$, ainsi

$$0v = (0 + 0)v \overset{8)}{=} 0v + 0v$$

Comme $0v \in V$, il existe un inverse noté $-0v$ et

$$\begin{aligned} 0v + (-0v) &= 0v + 0v + (-0v) \\ 0_V &= 0v + 0_V \quad \text{par } 5) \\ 0_V &= 0v \qquad\quad\ \text{par } 4) \end{aligned}$$

De plus par 4) on a

$$0_V + 0_V = 0_V$$

Or ceci est l'axiome 5) où $v = 0_V$. Ainsi $0_V = -0_V$.

c) $\alpha 0_V = 0_V$. On a

$$\alpha 0_V = \alpha(0_V + 0_V).$$

En procédant comme au point précédant, on a que $0_V = \alpha 0_V$.

d) $(-1)v = -v$. On a

$$v + (-1)v \overset{10)}{=} 1v + (-1)v \overset{8)}{=} (1 + (-1))v = 0v \overset{Point b)}{=} 0_V.$$

Donc $(-1)v$ est un inverse de v. Or par le point a), l'inverse est unique, donc $(-1)v = -v$.

Exercice 27

Prouver le théorème suivant. *Soient V un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de V. Alors toute famille d'éléments de V de plus de n éléments est une famille linéairement dépendante.*

Sol.:

Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ avec $p > n$ une famille de vecteurs de V. On sait que l'application coordonnées $[\cdot]_B : V \to \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme et donc préserve les relations de dépendances et d'indépendances linéaire. Ainsi $\{[v_1]_B, \ldots, [v_p]_B\}$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, possédant la même relation de dépendance que $\{v_1, \ldots, v_p\}$.

Grâce au chapitre 1, on sait que $\{[v_1]_B, \ldots, [v_p]_B\}$ est une famille liée dans $\mathbb{R}^n$ car $p > n$. Ainsi il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des réels non tous nuls, tels que

$$\alpha_1[v_1]_B + \ldots + \alpha_p[v_p]_B = \overrightarrow{0}.$$

Or $[\cdot]_B$ est linéaire, donc on obtient

$$[\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p]_B = \overrightarrow{0}.$$

où $\overrightarrow{0}$ nous donne les coefficients de $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p$ comme combinaison linéaire des vecteurs de la base B. Ainsi,

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p = 0b_1 + 0b_2 + \cdots + 0b_n = 0_V$$

Ainsi $\{v_1, \ldots, v_p\}$ n'est pas libre car 0_V s'exprime comme combinaisons linéaires de $v_1, \ldots, v_p$ avec des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ non tous nuls.